معارف

- **التشابه المستوي المباشر**

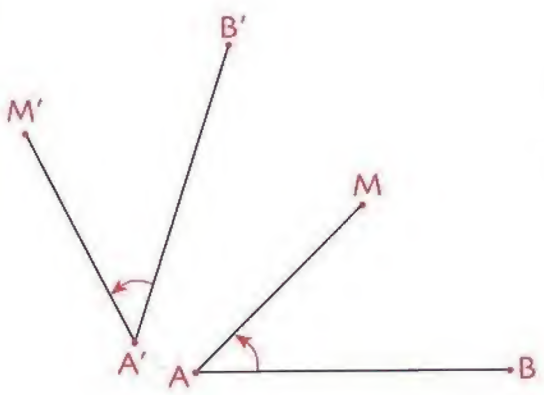
تعريف

λ عدد حقيقي موجب تماما.

نسمي تشابها مستويا مباشرا نسبته λ كل تحويل نقطي S للمستوي في نفسه حيث : من أجل كل النقط A، B، M من المستوي ذات الصور A'، B'، M' على الترتيب وفق S

يكون : $\begin{cases} A'B' = \lambda\, AB \\ (\overrightarrow{A'B'} ; \overrightarrow{A'M'}) = (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AM}) + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.

- التشابه المباشر الذي نسبته 1 يسمى تقايسا موجبا، و يسمى كذلك إزاحة.
- الإزاحة هي تقايس يحفظ المسافات و الزوايا الموجهة.
- كل إزاحة هي إنسحاب أو دوران.
- التحويل المطابق للمستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.
- كل انسحاب في المستوي هو تشابه مباشر نسبته 1.
- كل دوران هو تشابه مباشر نسبته 1.
- كل تحاك نسبته λ هو تشابه مباشر نسبته $|\lambda|$.



- **خواص**

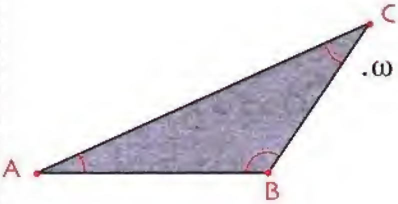
S تحويل نقطي للمستوي.

- التحويل S تشابه مباشر إذا وفقط إذا كان S مركب تحاك و إزاحة.
- كل تشابه مباشر هو تحويل مطابق أو إنسحاب أو يقبل نقطة صامدة وحيدة تسمى مركز التشابه.
- كل تشابه مباشر $S(\omega ; \lambda ; \theta)$ يمكن إعتباره مركبا تبديليا لدوران $r(\omega ; \theta)$ و تحاك $h(\omega ; \lambda)$ حيث $\lambda > 0$. (أي $h \circ r = r \circ h$)
- كل تشابه مباشر مركزه ω هو تشابه مباشر يتميز بالعناصر التالية : المركز ω، النسبة λ $(\lambda > 0)$ و الزاوية θ (θ هو قيس لزاوية التشابه) حيث من أجل كل نقطة M تختلف عن ω :

عن ω : $\begin{cases} \omega M' = \lambda\, \omega M \\ (\overrightarrow{\omega M} ; \overrightarrow{\omega M'}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.

- من أجل كل نقطتين A و B حيث A' و B' صورتاهما على الترتيب بالتشابه المباشر الذي نسبته λ و زاويته θ، $\begin{cases} A'B' = \lambda\, AB \\ (\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{A'B'}) = \theta + k2\pi \end{cases}$ ، $(k \in \mathbb{Z})$.
- إذا كانت A، B، A' و B' أربع نقط من المستوي بحيث $A \neq B$ و $A' \neq B'$ فإنه يوجد تشابه مباشر وحيد S حيث $S(A) = A'$ و $S(B) = B'$.

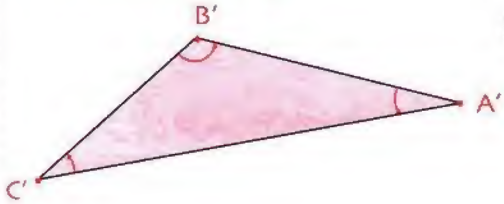
• **تركيب تشابهين مباشرين**



• مركب تشابهين مباشرين لهما نفس المركز ω هو تشابه مباشر مركزه ω.

أي $S(\omega, \lambda', \theta') \circ S(\omega, \lambda, \theta) = S(\omega, \lambda\lambda', \theta + \theta')$

و $S(\omega, \lambda, \theta) \circ S(\omega, \lambda', \theta') = S(\omega, \lambda\lambda', \theta' + \theta)$.



• كل تشابه مباشر يحول مثلثا إلى مثلث مشابه له مباشرة (لأن كل زاويتين متقابلتين فيهما متقايستان و لهما نفس الإتجاه).

• **التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة**

تعريف

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

كل تشابه مباشر يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$، يعرف بالعلاقة $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان و $a \neq 0$.

• كل تحويل نقطي T يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$. حيث $z' = az + b$ ؛ a و b عددان مركبان و $a \neq 0$، هو تشابه مباشر نسبته $|a|$.

• إذا كان $a = 1$ فإن التحويل T انسحاب شعاعه $\vec{v}(b)$.

• إذا كان $a \neq 1$ فإن T يقبل نقطة صامدة واحدة ω لاحقتها $\frac{b}{1-a}$ و T هو مركب تبديلي لتحاك مركزه ω و نسبته $|a|$ و دوران مركزه ω (نفس مركز التحاكي) و زاويته $\arg(a)$.

نقول إن T هو تشابه مباشر مركزه ω و نسبته $|a|$، و زاويته $\arg(a)$.

ملاحظة : يمكن تعريف التشابه $S(\omega, k, \theta)$ الذي يرفق بنقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ بالعلاقة $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$.

• **خواص**

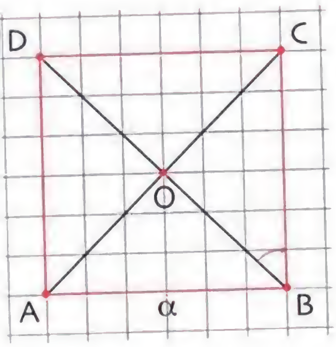
الدوران $r(\omega ; \theta)$	التحاكي $h(\omega ; k)$ ؛ $k \neq 0$	التشابه $S(\omega, \lvert k \rvert, \theta)$
يحفظ المسافات و المساحات	يكبر (أو يصغر) بضرب • المسافات في k • المساحات في k^2	يكبر (أو يصغر) بضرب • المسافات في k • المساحات في k^2
يحفظ الزاويا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.	يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح، التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.	يحفظ الزوايا الموجهة، المرجح التوازي، التعامد، التقاطع، الاستقامية، التماس.
يحول مستقيمًا إلى مستقيم.	يحول مستقيما إلى مستقيم يوازيه.	يحول مستقيما إلى مستقيم
يحول دائرة $\mathscr{C}(O ; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O' ; R)$ حيث $O' = r(O)$	يحول دائرة $\mathscr{C}(O ; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O' ; R')$ حيث $O' = r(O)$ و $R' = kR$.	يحول دائرة $\mathscr{C}(O ; R)$ إلى الدائرة $\mathscr{C}'(O' ; R')$ حيث $O' = S(O)$ و $R' = \lvert k \rvert R$.

1 التعرف على تشابه مباشر

تمرين 1

ABCD مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. T تحويل نقطي يحول O إلى B و D إلى C.
اثبت أن T تشابه مباشر مركزه A. حدد نسبته و زاويته.

حل



• نفرض أن المربع ABCD موجه توجيها مباشرا لدينا $O \xrightarrow{T} B$. $O \xrightarrow{T} B$

نضع $AB = \alpha$ (حيث $\alpha > 0$). لدينا $\frac{BC}{OD} = \frac{\alpha}{\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha}$.

إذن $BC = \sqrt{2}\, OD$. و لدينا $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ حيث $k \in \pi$.

إذا فرضنا أن صورة A وفق T هي A′ فإن المثلثين AOD و A′BC متشابهان مباشرة. بما أن المثلث AOD قائم في O و متساوي الساقين فإن المثلث A′BC قائم في B و متساوي الساقين. أي أن المثلث A′BC ينطبق على المثلث ABC. و بالتالي A′ تنطبق على A (النقطة A صامدة بالتحويل T).

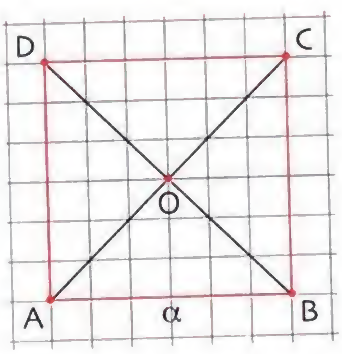
إذن T تشابه مركزه A و نسبة $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

تمرين 2

ABCD مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. S_C، S_A و S_O تشابهات مباشرة حيث S_C مركزه C و يحول O إلى B. S_A مركزه A و يحول B إلى D. S_O مركزه O و يحول B إلى D.

• عين النسبة و زاوية كل من التشابهات S_C، S_A و S_O.

حل



• $S_C \left| \begin{array}{l} C \longmapsto C \\ O \longmapsto B \end{array} \right.$. نضع $AB = \alpha$ $(\alpha > 0)$.

نسبة التشابه S_C هي $\frac{CB}{CO}$ و زاويته هي قيس $(\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{CB})$.

حساب $\frac{CB}{CO}$: لدينا $CO = \frac{CA}{2}$ و المثلث ABC قائم في A و متساوي الساقين. إذن $AC^2 = 2\alpha^2$. ينتج أن $AC = \alpha\sqrt{2}$.

و بالتالي $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\alpha}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{2CB}{CA} = \frac{CB}{CO}$. إذن نسبة التشابه S هي $\sqrt{2}$.

حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{CO})$. نلاحظ أن (CO) هو منصّف الزاوية $(\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{CD})$.

إذن $\frac{\pi}{4}$ قيس للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{CB}\ ,\ \overrightarrow{CO})$. و بالتالي نسبة التشابه S_C هي $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

• لدينا $S_A \left| \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto D \end{array} \right.$. نسبة S_A هي $\frac{AD}{AB}$ و زاويته $(\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AB})$.

حساب $\frac{AD}{AB}$: لدينا $1 = \frac{AD}{AB}$ ، إذن نسبة التشابه S_A هي 1.

حساب قيس للزاوية $(\overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AB})$: هذه الزاوية قائمة و موجهة في الاتجاه المباشر. إذن $\frac{\pi}{2}$ قيس لهذه الزاوية. و بالتالي نسبة التشابه S_A هي 1 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

• لدينا $S_0 \left| \begin{array}{l} O \longmapsto O \\ B \longmapsto D \end{array} \right.$. نسبة S_0 هي $\frac{OD}{OB}$ و هي 1 و زاويته $(\overrightarrow{OD}\ ,\ \overrightarrow{OB})$، و هي زاوية مستقيمة و π قيس لها. و بالتالي نسبة التشابه S_0 هي 1 و زاويته π .

إذن S_O دوران مركزه O و زاويته π . يمكن اعتبار S_0 أيضا تحاكيا مركزه O و نسبته -1

و هو أيضا تناظر مركزه O .

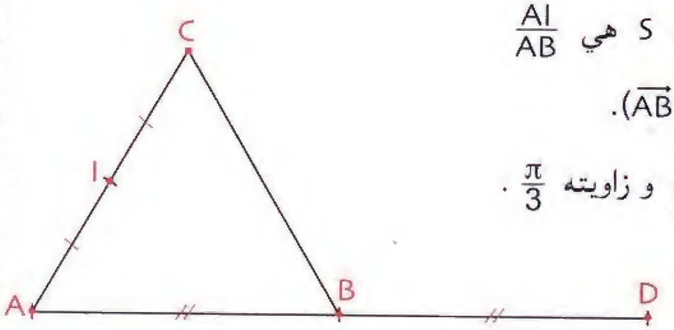
تمرين 3

ABC مثلث متقايس الأضلاع، I منتصف $[AC]$. نسمي S التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول B إلى I.

• عين نسبة التشابه S و زاويته.

• انشئ النقطة D سابقة C بالتشابه S. برّر إجابتك.

حل



• لدينا $S \left| \begin{array}{l} A \longmapsto A \\ B \longmapsto I \end{array} \right.$. إذن نسبة التشابه S هي $\frac{AI}{AB}$

حيث $\frac{1}{2} = \frac{AI}{AB}$ ، و زاويته $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\pi}{3}$.

إذن S تشابه مباشر مركزه A، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

• D سابقة النقطة C يعني $S(D) = C$.

إذن $AC = \frac{1}{2} AD$ و $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$. و بالتالي النقطة D تنتمي إلى (AB) حيث $AD = 2AB$.

إذن D هي نظيرة A بالنسبة إلى B. (الشكل)

تمرين 4

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$.

T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(x\,;y)$ النقطة $M'(x'\,;y')$ حيث $\begin{cases} x' = x - y + 3 \\ y' = x + y - 4 \end{cases}$

لتكن z لاحقة M و z' لاحقة M'.

- عبّر عن z بدلالة z' .
- حدد طبيعة التحويل T و عناصره المميزة.

حل

- نضع $Z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$ فيكون

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= (x - y + 3) + i(x + y - 4) \\ &= x - y + 3 + ix + iy - 4i \\ &= (x + iy) + i(x + iy) + 3 - 4i = (1 + i)(x + iy) + 3 - 4i \end{aligned}$$

إذن $z' = (1 + i)z + 3 - 4i$

و هذه الكتابة على الشكل $z' = az + b$. حيث $a \neq 0$ إذن التحويل النقطي $T : M(z) \longrightarrow M'(z')$

حيث $z' = (1 + i)z + 3 - 4i$ تشابه مباشر، مركزه النقطة الصامدة ω ذات اللاحقة z_0 حل المعادلة $z = (1 + i)z + 3 - 4i$ أي $z = 4 + 3i$.

إذن مركز التشابه T هو $\omega(4 + 3i)$. نسبته $|i + 1|$ أي $\sqrt{2}$ و زاويته $\arg(1 + i)$ أي $\frac{\pi}{4}$.

إذن التحويل T تشابه مباشر مركزه $\omega(4 + 3i)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

2 التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o\,;\vec{i},\vec{j})$.

عبّر عن التشابه المباشر S بالعبارة $z' = az + b$ حيث a و b عددان مركبان في كل حالة مما يلي :

- S إنسحاب شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$.
- S تشابه مباشر مركزه O و نسبته $\sqrt{3}$ و زاويته $-\frac{\pi}{6}$.
- S تشابه مباشر مركزه $\omega(4 - 3i)$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

حل

لتكن $M(z)$ نقطة من المستوي صورتها وفق S النقطة $M'(z')$.

- الانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$ معرف بالعبارة $z' = z + b$.

إذن الانسحاب S الذي شعاعه $\vec{v}(3 - 2i)$ يعرف كما يلي : $z' = z + 3 - 2i$.

• التشابه $S(\omega, k, \theta)$ حيث $\omega(z_0)$، يعرف بالعبارة $z' - z_0 = ke^{i\theta}(z - z_0)$

إذن التشابه $S\left(O, \sqrt{2}, -\frac{\pi}{6}\right)$ يعرف بالعبارة $z' = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} z$.

أو أيضا : $z' = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) z$ أي $z' = \left(\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z$.

ملاحظة : يعرف التشابه $S\left(O, \sqrt{3}, -\frac{\pi}{6}\right)$ كما يلي :

من أجل كل نقطة M تختلف عن O. $\begin{cases} OM' = \sqrt{3}OM \\ (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $\left|\frac{z'}{z}\right| = \sqrt{3}$ و $\arg\frac{z'}{z} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$.

إذن $\frac{z'}{z} = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}}$ أو $z' = \sqrt{3}\, e^{-i\frac{\pi}{6}} z$.

نلاحظ أن هذه العلاقة صحيحة من أجل النقطة الصامدة O مركز التشابه S.

• لدينا التشابه $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$ حيث ω النقطة ذات اللاحقة $4 - 3i$.

إذن التشابه S يعرف بالعبارة $z' - (4 - 3i) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(z - (4 - 3i))$ أو $z' = 2iz - 2 - 11i$.

ملاحظة : يمكن إعطاء تفسير هندسي كالآتي : التشابه $S\left(\omega, 2, \frac{\pi}{2}\right)$ يرفق بكل نقطة M من المستوي النقطة M' حيث $\omega M' = 2\omega M$ و $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ مع $k \in \mathbb{Z}$.

أو أيضا $\frac{\omega M'}{\omega M} = 2$ ، $(\overrightarrow{\omega M}, \overrightarrow{\omega M'}) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

و بالتالي $\left|\frac{z' - z_0}{z - z_0}\right| = 2$ و $\arg\frac{z' - z_0}{z - z_0} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ (حيث $z_0 = 4 - 3i$).

إذن $\frac{z' - z_0}{z - z_0} = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i$. بعد الحساب و تعويض z_0 نجد $z' = 2iz - 2 - 11i$.

تمرين 2

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o ; \vec{i}, \vec{j})$.

لتكن النقط $A(1 ; 0)$ ، $B(-1 ; 1)$ ، $C(0 ; 2)$ و $D(-1 ; 5)$.

عين التشابه المباشر S الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D.

حل

S تشابه مباشر يعني أنه يوجد عددان مركبان a و b $(a \neq 0)$ حيث $z' = az + b$.

S يحول A إلى C يعني $z_C = az_A + b$ و S يحول B إلى D يعني $z_D = az_B + b$

لدينا $z_A = 1$ ، $z_B = -1 + i$ ، $z_C = 2i$ ، $z_D = -1 + 5i$

و بتعويض z_A ، z_C ، z_B ، z_D نجد الجملة ذات المجهولين a و b التالية :

$\begin{cases} a + b = 2i \\ (-1 + i)a + b = -1 + 5i \end{cases}$ و بحل هذه الجملة نجد $a = 1 - i$ و $b = -1 + 3i$.

إذن $z' = (1 - i)Z - 1 + 3i$

ملاحظة : يمكن أن نكتب العلاقة الأخيرة تحليليا بوضع $z = x + iy$ و $z' = x' + iy'$

لدينا $x' + iy' = (1 - i)(x + iy) - 1 + 3i$ و نجد $\begin{cases} x' = x + y - 1 \\ y' = -x + y + 3 \end{cases}$

تمرين 3

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

ليكن S التشابه المباشر المعرف بالعلاقة $z' = (1 - i)z - 3 + i$

حدد العناصر المميزة للتشابه S.

حل

التحويل S ليس إنسحابا لأن $1 - i \neq 1$.

إذن S يقبل نقطة صامدة وحيدة ω لاحقتها z_0 حل المعادلة $z = (1 - i)z - 3 + i$.

هذه المعادلة تكافئ $-iz = 3 - i$ إذن $z = 1 + 3i$

و بالتالي مركز التشابه S هو النقطة $\omega(1 + 3i)$.

نسبة التشابه S هي $|1 - i| = \sqrt{2}$. زاوية التشابه S هي عمدة للعدد $1 - i$ و لتكن $-\frac{\pi}{4}$.

إذن S تشابه مباشر مركزه $\omega(1 + 3i)$ و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{4}$.

3 تركيب تشابهين مباشرين

تمرين 1

S_1 تشابه مباشر معرف بالعلاقة $z' = (\sqrt{3} - i)z$ و S_2 تشابه مباشر معرف بالعلاقة $z' = iz - i$.

عين عبارة كل من التحويلين $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ ثمّ العناصر المميزة لكل منهما.

حل

كل من $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر.

لتكن النقطة M ذات اللاحقة z و النقطة M' صورة M وفق $S_1 \circ S_2$.

لدينا $M' = S_1 \circ S_2(M) = S_1[S_2(M)]$.

عبارة $S_1 \circ S_2$ تحسب كما يلي : $z' = (\sqrt{3} - i)[iz - i] = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$.

إذن عبارة التشابه $S_1 \circ S_2$ هي $z' = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$.

تعيين العناصر المميزة للتشابه $S_1 \circ S_2$.

مركز $S_1 \circ S_2$ هو النقطة الصامدة ω لاحقتها z_0 حل المعادلة $z = (1 + i\sqrt{3})z - 1 - i\sqrt{3}$

ينتج أن $z = \frac{3 - i\sqrt{3}}{3}$ أي $\omega\left(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)$.

نسبة $S_1 \circ S_2$ هي $|1 + i\sqrt{3}| = 2$، زاوية $S_1 \circ S_2$ هي $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

ينتج أن $S_1 \circ S_2$ تشابه مباشر مركزه $\omega\left(1 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)$ و نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و بنفس الطريقة نعين عبارة $S_2 \circ S_1$.

لدينا $z' = i\,[(\sqrt{3} - i)\,z] - i = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$

إذن عبارة التشابه $S_2 \circ S_1$ هي $z' = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$.

تعييّن العناصر المميزة للتشابه $S_2 \circ S_1$: مركز $S_2 \circ S_1$ هو النقطة ω' لاحقتها z_1

حل المعادلة $z = (1 + i\sqrt{3})\,z - i$. (أي $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$)

النسبة هي $|1 + i\sqrt{3}| = 2$، الزاوية هي $\arg(1 + i\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ؛ $k \in \mathbb{Z}$.

إذن $S_2 \circ S_1$ تشابه مباشر مركزه $\omega'\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ، نسبته 2، زاويته $\frac{\pi}{3}$.

ملاحظة : يمكن تعيين عناصر كل من $S_1 \circ S_2$ و $S_2 \circ S_1$ اعتمادا على إعطاء العبارة المركبة لكل من S_1 و S_2. إذا فرضنا أن $\alpha + i\beta$ هي لاحقة مركز $S_1 \circ S_2$.

$$\begin{tikzcd} & A\ (z_1) \arrow[dr, bend left, "S_1"] & \\ \omega\ (\alpha + i\beta) \arrow[ur, bend left, "S_1"] \arrow[rr, "S_1 \circ S_2"'] & & \omega\ (\alpha + i\beta) \end{tikzcd}$$

بوضع $S_2(\omega) = A$ أي $z_1 = -\beta + i(\alpha - 1)$

و $S_1(A) = \omega$ أي $(\sqrt{3} - i)\,z_1 = \alpha + i\beta$.

ينتج أن $\alpha + i\beta = (\sqrt{3} - i)\,(-\beta + i(\alpha - 1))$.

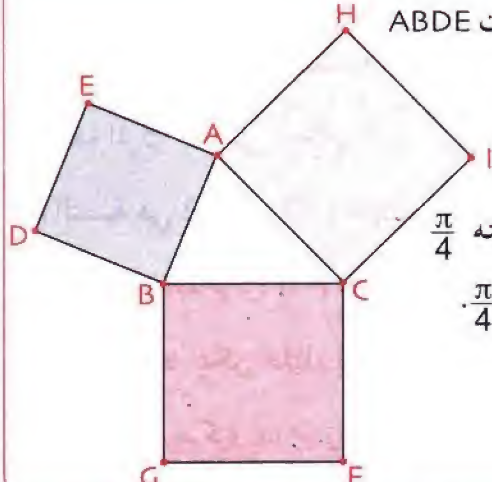
و بالتالي : $\begin{cases} \alpha = -\beta\sqrt{3} - \alpha + 1 \\ \beta = \beta + \sqrt{3}\alpha - \sqrt{3} \end{cases}$ أو $\begin{cases} 2\alpha + \beta\sqrt{3} = 1 \\ \sqrt{3}\alpha = \sqrt{3} \end{cases}$ إذن $\alpha = 1$ و $\beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

أي أن لاحقة ω، مركز التشابه $S_1 \circ S_2$ هي $1 + i\frac{\sqrt{3}}{3}$ و نسبة $S_1 \circ S_2$ هي جداء نسبتي S_1 و S_2

أي 1×2. زاوية $S_1 \circ S_2$ هي مجموع زاويتي S_1 و S_2 أي $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$.

و بنفس الطريقة نعين العناصر المميزة للتشابه $S_2 \circ S_1$.

تمرين 2



ABC مثلث (الشكل). ننشئ على أضلاع هذا المثلث المربعات ABDE و BCFG ، CAHI. ليكن A' مركز المربع BCFG و B' مركز المربع CAHI و C' مركز المربع ABDE.

نعتبر التشابه المباشر S_C الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$

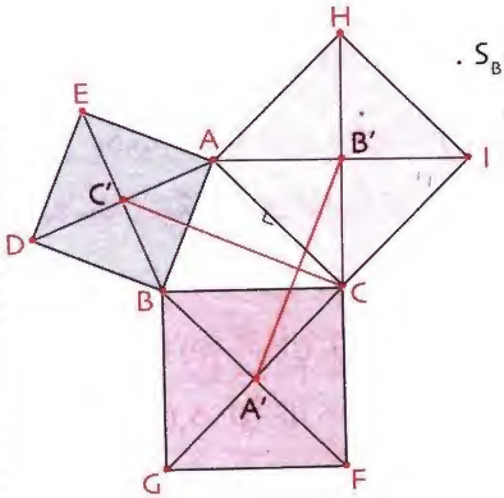
و التشابه المباشر S_B الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

- عين صورتي A' و B' بالتحويل $S_B \circ S_C$.
- استنتج أن $A'B' = CC'$ و أن $(A'B') \perp (CC')$.

حل

S_C التشابه الذي مركزه C و نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

(لأن $CA = \sqrt{2}\, CB'$ و $(\overrightarrow{CB'} ; \overrightarrow{CA}) = \frac{\pi}{4}$) و بالمثل S_B التشابه الذي مركزه B و نسبته $\frac{1}{\sqrt{2}}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$ (لأن $BC' = \frac{1}{\sqrt{2}} BA$ و $(\overrightarrow{BA} ; \overrightarrow{BC'}) = \frac{\pi}{4}$).



نعلم أن $S_C(B') = A$ ؛ $S_C(A') = F$ ؛ $S_B(A) = c'$

و $S_B(F) = c$ إذن $S_B \circ S_C(A') = C$ و $S_B \circ S_C(B') = C'$.

و بما أن نسبة التشابه $S_B \circ S_C$ هي $\sqrt{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ أي 1

فهو تقايس موجب (أي إزاحة). إذن $A'B' = CC'$.

و بما أن زاوية التشابه $S_B \circ S_C$ هي $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ أي $\frac{\pi}{2}$.

إذن $(A'B') \perp (CC')$.

ينتج أن $A'B' = CC'$ و $(A'B') \perp (cc')$.

4 تحليل تشابه مباشر

تمرين

S التشابه المباشر الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$

حيث $z' = (\sqrt{3} - i) z + 1 + i(\sqrt{3} - 1)$.

حلل S إلى تحاك و دوران.

حل

عبارة التشابه S من الشكل : $z' = az + b$ حيث $a = \sqrt{3} - i$ ، $b = 1 + i(\sqrt{3} - 1)$

تعيّن العناصر المميزة للتشابه S.

لاحقة المركز ω هي $z_0 = \frac{b}{1 - a}$ أي $z_0 = \frac{1 + i(\sqrt{3} - 1)}{1 - (\sqrt{3} - i)}$. نجد $z_0 = -i$

• النسبة هي $|a| = |\sqrt{3} - i| = 2$. الزاوية هي $\arg(a) = \arg(\sqrt{3} - i) = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$.

إذن S تشابه مركزه $\omega(-i)$، نسبته 2 وزاويته $-\frac{\pi}{6}$.

و بالتالي S يمكن تحليله إلى مركب تبديلي لتحاك h مركزه ω و نسبته 2

و دوران r مركزه ω و زاويته $-\frac{\pi}{6}$. $S\left(\omega ; 2, -\frac{\pi}{6}\right) = h_{(\omega, 2)} \circ r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} = r_{(\omega, -\frac{\pi}{6})} \circ h_{(\omega, 2)}$

تمارين و حلول نموذجية

تمرين 1

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

A، ω نقطتان لاحقتاهما على الترتيب 1، $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$

1 . عين قيسا للزاوية $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega})$. . استنتج قيسا للزاوية $(\overrightarrow{\omega O} ; \overrightarrow{\omega A})$ و قيمة $\frac{\omega A}{\omega O}$.

. ما هي عبارة التشابه S الذي يحول O إلى A؟

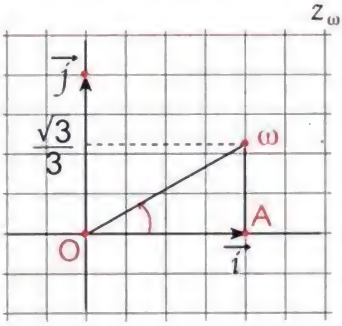
2 . t هو الإنسحاب الذي شعاعه $\vec{j}$.

. حدد نسبة و زاوية التشابه s_1 حيث $S = t \circ s_1$. . حدد نسبة و زاوية التشابه s_2 حيث $S = s_2 \circ t$.

حل

1 . تعيين قيس للزاوية $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega})$.

لدينا $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega}) = \arg z_\omega + k2\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$. $z_\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}(\sqrt{3} + i)$



$|z_\omega| = \frac{2}{\sqrt{3}}$ و $\cos(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega}) = \frac{1}{2}$

إذن $(\overrightarrow{OA} ; \overrightarrow{O\omega}) = \frac{\pi}{6} + k2\pi$، $(k \in \mathbb{Z})$.

. $(\overrightarrow{\omega O} ; \overrightarrow{\omega A}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} + k2\pi$ أي $\frac{\pi}{3}$ قيس للزاوية $(\overrightarrow{\omega O} ; \overrightarrow{\omega A})$.

$\frac{\omega A}{\omega O} = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ (المثلث $OA\omega$ قائم في A).

. عبارة التشابه S الذي يحول O إلى A :

التشابه الذي يحول O إلى A معرف بمركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و يعرف أيضا بالعبارة $z' - z_\omega = \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_\omega)$. و بعد تعويض z_ω بالعدد $\frac{1}{3}(3 + i\sqrt{3})$

و الاختصار نجد $z' = \left(\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}\right)z + 1$

2 . تحديد نسبة و زاوية التشابه المباشر s_1 حيث $S = t \circ s_1$.

لتكن k_1 نسبة التشابه المباشر s_1. نعلم أن نسبة S هي $\frac{1}{2}$ و نسبة t هي 1.

إذن نسبة s_1 تحقق $\frac{1}{2} = 1 \times k_1$ أي $k_1 = \frac{1}{2}$.

ينتج أن نسبة التشابه المباشر s_1 هي $\frac{1}{2}$. لدينا زاوية S هي $\frac{\pi}{3}$ و زاوية t منعدمة.

لتكن θ_1 زاوية التشابه s_1. إذن θ_1 تحقق $\frac{\pi}{3} = 0 + \theta_1$. أي $\theta_1 = \frac{\pi}{3}$.

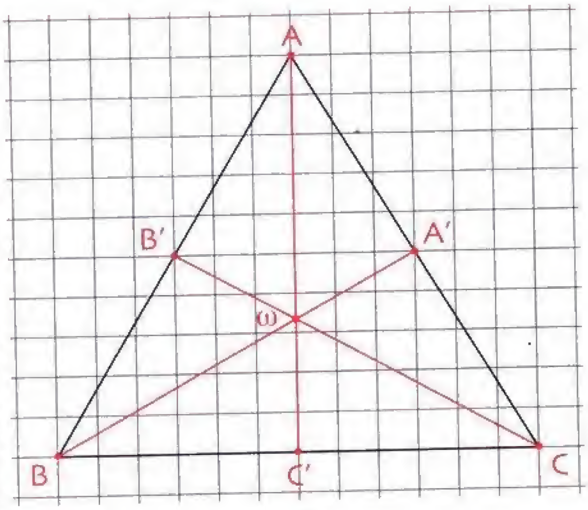
ينتج أن زاوية التشابه المباشر s_1 هي $\frac{\pi}{3}$.

. باستعمال نفس الطريقة نعين نسبة و زاوية التشابه المباشر s_2. و نجد: نسبة s_2 هي $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

تمرين 2

ABC مثلث متقايس الأضلاع، A' منتصف [AC]، B' منتصف [AB]، C' منتصف [BC].
عين تشابها مباشرا S بحيث يحول A إلى A'، B إلى B'، C إلى C' (يمكن أن يعبر عنه بمركب تحويلين معروفين).

حل



ليكن ω مركز ثقل المثلث ABC
(نقطة تلاقي متوسطات المثلث ABC).
التحاكي h الذي مركزه ω و نسبته $-\frac{1}{2}$
يحول A إلى C (B إلى A' و C إلى B').
الدوران r الذي مركزه ω و زاويته $\frac{2\pi}{3}$
يحول C' إلى A' (و A' إلى B' و B' إلى C')
أي أن $A \xmapsto{h} C' \xmapsto{r} A'$.

التحاكي h الذي نسبته سالبة $\left(-\frac{1}{2}\right)$ يمكن أن يعبّر عنه بمركب (تبديلي) لتحاك h_1 مركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و دوران r_1 مركزه ω و زاويته π أي $h = r_1 \circ h_1$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "h_1"'] & C' \arrow[r, "r"] & A' \\ & C_1 \arrow[u, "r_1"'] & \end{tikzcd}$$

إذن $S = r \circ h = r \circ (r_1 \circ h_1)$.

التحويل $r_1 \circ h_1$ هو تشابه مباشر مركزه ω و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته π .
أي r تشابه مباشر مركزه ω ، نسبته 1 (دوران) و زاويته $\frac{2\pi}{3}$.
إذن S تشابه مركزه ω، نسبته $\frac{1}{2}$ وزاويته $\pi + 2\frac{\pi}{3}$ (أو $-\frac{\pi}{3}$) .
بنفس الطريقة نبرهن أن $S(B) = B'$ و $S(C) = C'$.

نستنتج أن التشابه المباشر الذي يحول A إلى A'، B إلى B'، C إلى C' هو التشابه المباشر الذي مركزه ω مركز ثقل المثلث ABC، و نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $-\frac{\pi}{3}$.

التعرف على تشابه مباشر

في التمارين ①، ②، ③، المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

1 عين العناصر المميزة للتشابه المباشر S الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ في كل حالة مما يلي:

1. $z' = -iz + 4$
2. $z' = (1 - i\sqrt{3})z + 1$
3. $z' = (1 + i)z - 1 - i$
4. $z' = -2z + 3 + 2i$

2 نفس السؤال في كل حالة مما يلي :

1. $z' = z + 3 - 4i$
2. $z' = 2iz$
3. $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)z + 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$
4. $z' = (\sqrt{3} + i)z$

3 A، B و C نقط لواحقها على الترتيب $-3i$ ؛ 1 ؛ $4i - 3$. عين النسبة و زاوية التشابه S الذي مركزه A و يحول B إلى C.

4 ABCD مربع مركزه O حيث $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$.
عين النسبة و زاوية التشابه S في كل حالة مما يلي :

1. S مركزه A و يحول O إلى D.
2. S مركزه C و يحول D إلى B.
3. S مركزه O و يحول A إلى C.

5 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر. ليكن T التحويل النقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = 2\alpha z + 1 + i$، $\alpha \in \mathbb{C}$.

عين قيم α حتى يكون

1. T إنسحابا.
2. T دورانا.
3. T تحاكيا نسبته 4.
4. T تناظرا مركزيا.

6 m عدد مركب، T تحويل نقطي يرفق بكل نقطة $M(z)$ من مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر النقطة $M'(z')$ حيث $z' = az + b$، $a \in \mathbb{C}^*$، $b \in \mathbb{C}$.

نفرض أن صورة $A(-1 + 6i)$ هي $B(2 + 3i)$ و صورة B هي $C(m)$ وفق T.

1. عين m حتى يكون T انسحابا.
2. عين m حتى يكون T دورانا.

حدد مركزه و زاويته.

7 ABC مثلث متقايس الأضلاع حيث $(\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{3}$، I منتصف [BC].
S_C التشابه المباشر الذي مركزه C و يحول A إلى I.

1. عين نسبة S_C و زاويته.
2. أنشئ النقطة D سابقة B وفق S_C.

8 نفس التمرين السابق من أجل التشابه المباشر S_A الذي مركزه A و يحول B إلى I.

9 ABC مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف [BC]. J نقطة تقاطع [AC] و الدائرة التي قطرها [AI].
أثبت أن التشابه المباشر الذي مركزه A و يحول I إلى B يحول أيضا J إلى I.

10 ω، A و B نقط من المستوي و S التشابه المباشر الذي مركزه ω و يحول A إلى A' و B إلى B'.

1. برهن أن التشابه الذي مركزه ω و الذي يحول A إلى B يحول أيضا A' إلى B'.
2. ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثين $\omega AA'$ و $\omega BB'$ ؟

التعبير عن تشابه مباشر بالأعداد المركبة

في التمارين 11 و 12 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر.

11 في كل ما يلي عبر عن التشابه المباشر S بالأعداد المركبة.

1 • مركز S هو $\omega\,(-2 + i)$، نسبته $\frac{1}{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

2 • مركز S هو $\omega\left(-\frac{5}{2} + \frac{5}{2}i\right)$، نسبته 2 و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

3 • مركز S هو $\omega\,(1\,;\,1)$، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

4 • مركز S هو $\omega\,(1\,;\,-1)$، يحول $A\,(5\,;\,3)$ إلى $B\,(0\,;\,-2)$.

12 A، B، C، D نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1 - i$، $2i$، $5 - 7i$ و $5 + 3i$.

1 • علم النقط A، B، C، D.

2 • عين العبارة المركبة التي تعرف التشابه المباشر S حيث $S(A) = C$ و $S(B) = D$.

13 المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس و المباشر $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$، ABCD مربع، I مركزه و K منتصف [CD]. S التشابه المباشر الذي يحول A إلى I و يحول C إلى K.

1 • ما هي لواحق النقط A، C، I، K؟

2 • عرف التشابه S بالأعداد المركبة.

3 • استنتج العناصر المميزة للتشابه S.

تركيب تشابهين مباشرين

14 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر. S و S′ التشابهان المباشران المعرفان على الترتيب بالعبارتين $z' = (1 + i)\,z + 2$ و $z' = az + b$ حيث $a \in \mathbb{C}^*$، $b \in \mathbb{C}$.

1 • عين مركز S و نسبته و زاويته.

2 • عين العلاقة بين a و b بحيث يكون $S \circ S' = S' \circ S$. ما هو مركز S′؟

15 $(A\,;\,\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ معلم متعامد و متجانس مباشر. I منتصف [BC]. ليكن R_B الدوران الذي مركزه B و زاويته $\frac{\pi}{2}$، T الإنسحاب الذي شعاعه $\overrightarrow{BC}$ و R_C الدوران الذي مركزه C و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

1 • ما هي صورة I وفق $S = R_C \circ T \circ R_B$؟

2 • عبر بالأعداد المركبة عن التحويل S.

3 • ما هي طبيعة التحويل S؟ حدد عناصره المميزة.

مسائل

16 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

نسمي S التحويل الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$ حيث $z' = (-1 + i)\,z + 2 - i$

1 • بيّن أن S تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميزة.

2 • ليكن S′ التحويل الذي يرفق بكل نقطة M النقطة G مركز ثقل المثلث $MM'M''$ حيث $M' = S(M)$ و $M'' = S \circ S(M)$.

• احسب بدلالة z لاحقة النقطة G.

• أثبت أن S′ تشابه مباشر ثم حدد مركزه.

• عيّن لاحقة النقطة M_1 حيث $S'(M_1) = O$ (O مبدأ المعلم).

• علم النقط M_1، M'_1، M''_1 ثم I حيث $M'_1 = S(M_1)$ و $M''_1 = S \circ S(M_1)$

17 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\,;\,\vec{i}, \vec{j})$.

A، B و C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب $1 - i$، i، $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

S التحويل الذي يرفق بنقطة M ذات اللاحقة z النقطة 'M ذات اللاحقة 'z حيث $z'=\frac{(1+i)z+1-i}{3}$

1. اثبت أن S تشابه مباشر يطلب اعطاء عناصره المميزة.

2. اثبت أن النقط A ، B ، ω على استقامة واحدة حيث ω مركز التشابه S.

3. عيّن قيس للزاوية $(\overrightarrow{OB}\,;\overrightarrow{OC})$.

اثبت أن المستقيم (OC) هو صورة المستقيم (OB) وفق S.

• عيّن النقطتين 'O و 'B صورتي O و B على الترتيب بالتحويل S.

• اثبت أن صورة (OB) هي ('OO) ثم استنتج أن النقط O، 'O و C على استقامة واحدة.

4. اثبت أن ω و C نقطتان من الدائرة التي قطرها ['O'B].

4. عبّر عن لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{MM'}$، $\overrightarrow{M\omega}$ بدلالة z لاحقة M.

• استنتج أن $MM' = M\omega$.

• احسب، من أجل كل نقطة M تختلف عن ω، قيسا للزاوية $(\overrightarrow{MM'}\,;\overrightarrow{M\omega})$.

5. عيّن صورة J منتصف [OC] بالدوران الذي مركزه I منتصف [OA] و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

18 المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس مباشر $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

نعتبر التحويل S الذي يرفق بكل نقطة M من المستوي ذات الاحداثيين $(x\,;y)$ النقطة 'M ذات الاحداثيين $(x'\,;y')$ حيث $\begin{cases}x' = x - y + 4\\ y' = x + y + 4\end{cases}$

1. عيّن اللاحقة 'z للنقطة 'M بدلالة اللاحقة z للنقطة M.

2. عيّن طبيعة التحويل S و عناصره المميزة.

3. A، B، C نقط من المستوي لواحقها على الترتيب 4-، 4، $4 + 4i$.

• حدّد صورتي كل من A و O بالتحويل S ثمّ عيّن صورة المستقيم (OA) و صورة محور القطعة [OA] بالتحويل S.

التشابهات المباشرة

1 تعطى العناصر المميزة للتشابه S في الجدول أدناه.

	لاحقة المركز ω	النسبة	الزاوية	ملاحظة
1	$2 - 2i$	1	$\frac{\pi}{2}$	دوران
2	1	2	$-\frac{\pi}{3}$	تشابه مباشر
3	$2 - i$	$\sqrt{2}$	$\frac{\pi}{4}$	تشابه مباشر
4	$1 + \frac{\pi}{4} i$	2	π	تناظر مركزه ω

2

1				انسحاب شعاعه $\vec{v}(3 - 4i)$
2	0	2	$\frac{\pi}{2}$	تشابه مباشر
3	1	1	$\frac{\pi}{4}$	دوران
4	0	2	$\frac{\pi}{6}$	تشابه مباشر

3 دوران مركزه A، زاويته $-\frac{\pi}{2}$

4 نضع $AB = \alpha$ $(\alpha > 0)$، k نسبة التشابه S، θ قيس زاوية له.

1. $k = \frac{AB}{AO} = \sqrt{2}$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{4}$.

2. $k = \frac{CB}{CD} = 1$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$، التشابه S دوران.

3. $k = \frac{OC}{OA} = 1$ ، $\theta = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) = \pi$.
S تناظر مركزي مركزه O.

5 1. T انسحاب من أجل $\alpha = \frac{1}{2}$

2. T دوران من أجل $|\alpha| = \frac{1}{2}$ مع $\alpha \neq \frac{1}{2}$

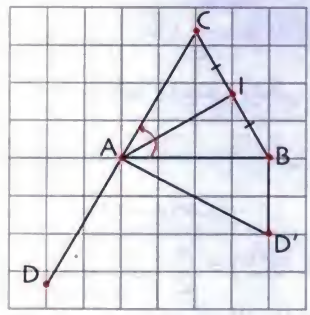
3. T تحاك نسبته 4 من أجل $\alpha = 2$

4. T تناظر مركزي من أجل $\alpha = -\frac{1}{2}$

6 1. من أجل $m = 5$ ؛ T انسحاب شعاعه $\vec{v}$ لاحقته $3 - 3i$.

2. من أجل $m = -1$ ؛ T دوران مركزه ω لاحقتها $-3 - i$ و زاويته $-\frac{\pi}{2}$.

7 1 . ليكن k نسبته S_C، θ زاويته.



$k = \frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}}) = \frac{\pi}{3}$

2 . انشاء $S_C(D) = B$

$\begin{cases} CB = \frac{1}{2} CD \\ (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{3} \end{cases}$

إذن D نظيرة C بالنسبة إلى A (الشكل).

8 1 . ليكن k نسبة S_A حيث $S_A(B) = I$

θ زاويته. $k = \frac{AI}{AB} = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\theta = (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}}) = \frac{\pi}{6}$

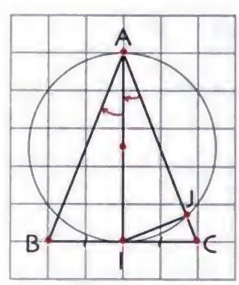
2 . انشاء D' حيث $S_A(D') = B$

لدينا $\begin{cases} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} AD' \\ (\widehat{\overrightarrow{AD'}, \overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{6} \end{cases}$ إذن D' تقاطع العمودي

على (AC) في A و العمودي على (AB) في B

(انظر شكل التمرين 7).

9 المثلثان AIB و AJI



متشابهان إذن التشابه S_A

الذي يحول I إلى B يحول

أيضا J إلى I.

10 1. من أجل التشابه المباشر S

يكون $\frac{\omega A'}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega B'}$ أي $\frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'}$

و من أجل تشابه S_ω الذي مركزه ω و يحول A إلى B

فإن نسبته هي $\frac{\omega B}{\omega A}$ و لدينا مما سبق $\frac{\omega B}{\omega A} = \frac{\omega B'}{\omega A'}$

أي أن أيضا S_ω يحول A' إلى B'.

2 . نستنتج أن المثلثين $\omega AA'$، $\omega BB'$ متشابهان.

11 1 . $z' = \frac{i}{2} z - \frac{3}{2} + 2i$

2 . $z' = (1 + i\sqrt{3}) z + \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2} i$

3 . $z' = (1 + i) z + 1 - i$

4 . $z' = -\frac{i}{2} z - \frac{3}{2} + \frac{i}{2}$

12 1 . تعلم النقط في مستو منسوب إلى معلم متعامد و متجانس.

2 . تعلم $z' = (3 - i) z + 3 - 3i$

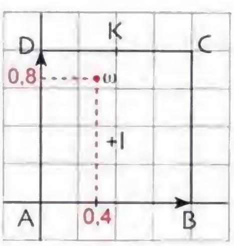
13 $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ معلم متعامد و متجانس.

1 . لواحق النقط A، C، I، K هي على الترتيب

0 ؛ $1+i$ ؛ $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$ ؛ $\frac{1}{2} + i$

2 . لدينا $z_I = az_A + b$، $z_K = az_C + b$

و بعد التعويض و الاختصار نجد $a = \frac{1+i}{4}$،



$b = \frac{1+i}{2}$. إذن عبارة S

هي $z' = \frac{1+i}{4} z + \frac{1+i}{2}$

3 . لاحقة ω مركز S هو حل

المعادلة $z' = z$ أي $z = \frac{2}{5} + \frac{4}{5} i$

14 1 . لاحقة ω مركز S هي حل المعادلة

$z' = z$ أي $z = 2i$

نسبة S هي $|1 + i| = \sqrt{2}$، زاوية S هي $\theta = \frac{\pi}{4}$.

2 . العلاقة بين a، b بحيث يكون $SoS' = S'oS$

هي $2(1 - a)i - b = 0$.

$a = 1$، S' انسحاب،

$a \neq 1$، لاحقة مركز S' هي $2i$.

15 1 . صور I وفق S حيث $S = R_C o T o R_B$

في المعلم المتعامد و المتجانس المباشر $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

نعين لاحقة J حيث $J = R_B(I)$ و $I\left(\frac{i}{2}\right)$

لدينا R_B معرف كما يلي $z' = iz + 1 - i$

و نعين لاحقة J و هي $i - \frac{1}{2}$

نعين لاحقة K حيث $K = T(J)$ و $T : z' = z - 1 + i$

فنجد $K\left(-\frac{1}{2}\right)$.

نعين لاحقة L حيث $R_C(K) = L$.

و $R_C : z' = iz + 1 + i$ فنجد $L\left(1+\frac{i}{2}\right)$

أي أن صورة I بالتحويل S هي L منتصف [BD]

2 • شعاع $S = R_C \circ R_T \circ R_B : z' = -z + 1 + i$

3 • S هو تناظر مركزه منتصف [BC] أي النقطة O مركز المربع ABDC.

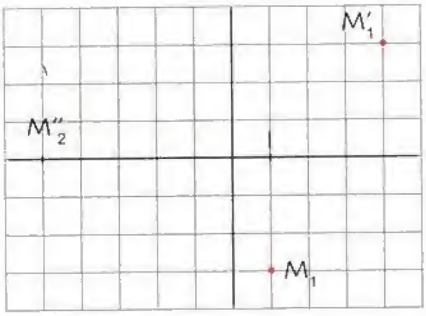
16 1. S تشابه مباشر مركزه (1)I، نسبته $\sqrt{2}$ وزاويته $\frac{3\pi}{4}$.

2. لاحقة G هي $z = -\frac{i}{3}z + 1 + \frac{i}{3}$ حيث z لاحقة M.

• S' تشابه مباشر مركزه (1)I.

• لاحقة M_1 حيث $S'(M_1) = O$ هي $1 - 3i$.

• النقطة M_1، M'_1، M''_1 في الشكل.



17 1. S تشابه مباشر مركزه $\omega\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{5}i\right)$

و نسبته $\frac{\sqrt{2}}{3}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

2 • نتحقق أن $\overrightarrow{B\omega} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BA}$.

إذن A، B، ω على استقامة واحدة.

3 • $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \text{Arg}\,\frac{z_C}{z_B} = \frac{\pi}{4}$

بما أن $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}}) = \frac{\pi}{4}$ وهي زاوية التشابه S فإن (OC) هو صورة (OB) وفق S.

$B' = O\,(0\,;0)$ ؛ $O'\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}i\right)$

بما أن $(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OO'}}) = \frac{\pi}{4}$ و هي زاوية التشابه S

فإن صورة (OB) هي (OO') بالتشابه S.

نتحقق أن $\overrightarrow{OB} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{OO'}$. إذن النقط O، O'، C على استقامة واحدة. (يمكن ملاحظة أن O' صورة O تنتمي إلى (OC) و بالتالي O، O'، C على استقامة واحدة).

4 • نبرهن أن $(\widehat{\overrightarrow{\omega B}, \overrightarrow{\omega O'}}) = \frac{\pi}{2}$.

و بالتالي ω تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].

نبرهن أيضا أن $(\widehat{\overrightarrow{CO'}, \overrightarrow{CB}}) = \frac{\pi}{2}$.

إذن C تنتمي إلى الدائرة التي قطرها [O'B].

18 1 • $z' = (1+i)z + 4 + 4i$

2 • S تشابه مباشر مركزه $\omega(-4 + 4i)$، نسبته $\sqrt{2}$ و زاويته $\frac{\pi}{4}$.

3 • $z_{A'} = z_O$ ؛ $z_{O'} = z_C$

بما أن $S(A) = O$ و $S(O) = C$.

فإن صورة (OA) بالتحويل S هي (OC).

و صورة محور القطعة [OA] هي محور القطعة [OC].

4 • لاحقة $\overrightarrow{MM'}$ هي $iz + 4 + 4i$

لاحقة $\overrightarrow{M\omega}$ هي $-z - 4 + 4i$

$$MM' = |(-y+4) + i(x+4)|$$
$$= |(-x-4) + i(-y+4)| = M\omega$$

$$(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\omega}}) = \arg\left(\frac{-z-4+4i}{iz+4+4i}\right) = \arg i = \frac{\pi}{2}$$

أي من أجل كل نقطة M تختلف عن ω،

$$(\widehat{\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M\omega}}) = \frac{\pi}{2}$$

5 • J' صورة J منتصف [OC]

بالدوران الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$.

J' تحقق $IJ = IJ'$ و $(\widehat{\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IJ'}}) = \frac{\pi}{2}$

(يمكن تعيين الدوران الذي مركزه I و زاويته $\frac{\pi}{2}$ ثمّ إيجاد لاحقة J').